1 Enunciado

Calcule el momento magnético dipolar de una esfera de radio R, con una carga q distribuida uniformemente en su volumen y que gira con velocidad angular $\mathbf{w}$.

Establezca la proporcionalidad entre este momento magnético y el momento angular de la esfera, si ésta posee una masa m distribuida uniformemente en el volumen.

2 Momento magnético

2.1 Antes de hacer ninguna cuenta

Podemos obtener bastante información de cuál va a ser el resultado sin necesidad de hace integral alguna., simplemente analizando las dimensiones y simetrías del problema.

- Sabemos que el resultado es un momento dipolar y por tanto debe tener las dimensiones de una intensidad de corriente multiplicada por una superficie.
- Por otro lado, los únicos datos necesarios son la carga de la esfera, su radio, y la velocidad angular de rotación.
- Para conseguir una cantidad con dimensiones de intensidad debemos dividir una carga por un tiempo.
  - La carga la tenemos.
  - El tiempo lo podemos obtener del periodo de giro, inversamente proporcional a la velocidad angular.
  - Por ello, para obtener una corriente podemos usar $q / (T / 2\pi) = qw$.
- Para conseguir una superficie solo podemos elevar al cuadrado el radio de la esfera.
- Por tanto el momento magnético debe ser proporcional a

$$m \propto qwR^2$$

- Por otro lado, el momento magnético es un vector que debe tener una cierta dirección.
  - La esfera es un cuerpo simétrico, que no define ninguna dirección.
  - La única dirección disponible es la que señala la velocidad angular.
  - El sentido del momento magnético puede ser el mismo que el de $\mathbf{w}$ o el opuesto.
- Por todo ello, el momento angular de esta esfera debe ser de la forma

$$\mathbf{m} = \alpha q R^2 \mathbf{w}$$

Siendo α una cantidad adimensional (un número) con signo, cuyo valor sí debe determinarse mediante cálculo integral

Obsérvese que en ningún momento se usa el que la distribución sea volumétrica; solo el que es simétrica en la esfera. En el caso de una carga distribuida uniformemente sobre la superficie, el razonamiento sigue siendo válido. Lo único que varía es el valor de α.

2.2 Cálculo del momento

Para calcular el momento dipolar magnético de una distribución de corriente de volumen debemos hallar la integral vectorial

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\,\mathrm{d}\tau'$$

siendo el volumen de integración aquél en que hay corriente. En nuestro caso, se trata de la esfera de radio R. Por ello usaremos coordenadas esféricas para realizar el cálculo.

La densidad de corriente en el caso de que tengamos una distribución de carga que se mueve rígidamente es

$$\mathbf{J} = \rho_0\mathbf{v} \qquad \rho_0 = \frac{q}{4\pi R^3/3}$$

La velocidad de los puntos de la esfera corresponde a una rotación pura

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}'$$

Si tomamos como eje Z el marcado por la velocidad angular nos queda la densidad de corriente

$$\mathbf{w} = w\mathbf{u}_z \qquad \mathbf{r}' = r'\mathbf{u}_{r'} \qquad \mathbf{J} = \rho_0 w r' \operatorname{sen}\theta' \mathbf{u}_{\varphi'}$$

El último producto vectorial puede obtenerse usando las relaciones entre las bases vectoriales o la propia definición de producto vectorial como un vector cuyo módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman (que es θ, por definición de esta coordenada), y con una dirección ortogonal a ambos.

Llevando esto a la integral nos queda el integrando

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{J} = -\rho_0 w r'^2 \operatorname{sen}\theta'\,\mathbf{u}_{\theta'}$$

y nos queda el momento magnético

$$\mathbf{m} = -\frac{\rho_0 w}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(r'^2\operatorname{sen}\theta'\,\mathbf{u}_{\theta'})r'^2\operatorname{sen}\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi'$$

Esta es una integral vectorial, por lo que hay que tener mucho cuidado con la base vdectorial empleada, ya que

Los vectores de la base dependen de la posición

Por ello, pasamos este vector a la [base cartesiana]

$$\mathbf{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{u}_x + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\mathbf{u}_y - \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{u}_z$$

y la integral se puede descomponer en esta base

$$\mathbf{m} = m_x\mathbf{u}_x + m_y\mathbf{u}_y + m_z\mathbf{u}_z$$

con

$$m_x = -\frac{\rho_0 w}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r'^4\,\mathrm{sen}^2\theta'\cos\theta'\,\cos\varphi'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi'$$
$$m_y = -\frac{\rho_0 w}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r'^4\,\mathrm{sen}^2\theta'\cos\theta'\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi'$$
$$m_z = \frac{\rho_0 w}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r'^4\,\mathrm{sen}^3\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi'$$

las dos primeras integrales se anulan ya que

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\varphi'\,\mathrm{d}\varphi' = 0$$

La tercera componente se convierte en un producto de tres integrales independientes

$$m_z = \frac{\rho_0 w}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3\theta'\,\mathrm{d}\theta'\int_0^{R} r'^4\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0 w}{2}(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{R^5}{5}\right)$$

Simplificando nos queda el momento dipolar magnético

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi\rho_0 w R^5}{15}\mathbf{u}_z = \frac{qR^2}{5}\mathbf{w}$$